EXERCICES DE SENSIBILISATION AUX PROBLÉMES NUMÉRIQUES

Bernard PICHON

• 1 • Suite de Fibonacci

Soit $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.
Calculer et afficher $W_n - 1$ où $W_n = V_n^2 - V_n$ et $V_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$

–a– Après le premier essai, essayer de trouver une relation de récurrence concernant directement les W_n . En déduire un test numérique, le faire (trouver aussi la démonstration de cette relation).

–b– Même par la méthode "naive", on peut trouver une relation de récurrence pour les V_n, donc pouvoir les calculer sans avoir à calculer les F_n . Le faire.

–c– Soit $f(x, y) = 2xy^4 + x^2y^3 - 2x^3y^2 - y^5 - x^4y + 2y$
Calculer pour x et y entiers strictement positifs, les valeurs positives prises par cette fonction (on pourra, en réécrivant ce polynôme, faire des encadrements de ses valeurs prises pour différentes valeurs relatives de x et y). Quels souvenirs ? ? (la démonstration *n'est pas* demandée ...).

–d– Rmq : $\forall n, k$, $F_n \mid F_{n\,k}$ Si $(m, n) = d$ alors $(F_m, F_n) = F_d$.

• 2 • Calcul des éléments d'une suite

Soit la suite

$$U_{n+1} = A - \frac{B}{U_n} + \frac{C}{U_n\, U_{n-1}}$$

Calculer numériquement à l'aide d'un programme la limite de cette suite pour les valeurs suivantes des paramètres :

$A = 6$, $B = 11$ et $C = 6$; $U_0 = 3/2$ et $U_1 = 5/3$
$A = 11$, $B = 36$ et $C = 36$; $U_0 = 5/2$ et $U_1 = 13/5$
$A = 6$, $B = 3$ et $C = -10$; $U_0 = 1/2$ et $U_1 = 5$
$A = 111$, $B = 1130$ et $C = 3000$; $U_0 = 11/2$ et $U_1 = 61/11$
$A = 9$, $B = 23$ et $C = 15$; $U_0 = 2$ et $U_1 = 5/2$
$A = 8$, $B = 17$ et $C = 10$; $U_0 = 3/2$ et $U_1 = 5/3$

–a– La "bonne" limite est : $b = U_0 + \sqrt{U_0\, U_1 - U_0^2}$

–b– La "mauvaise" limite est : $c = A - 2\, U_0$

–c– Rmq : Rechercher la solution générale sous la forme $U_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

• 3 • Non-distributivité ET/OU Non-commutativité

–a– Calculer (en SP comme en DP), les quantités suivantes (et exactement comme cela est indiqué) pour :
$a = 0.05$, $b = 0.2825$, $c = 0.65$, $d = 0.0175$
$t1 = a + b + c$, $t2 = a + b + d$, $x1 = t1 + d - 1$, $x2 = t2 + c - 1$
Comparaison de $x1$ et $x2$, Conclusion, explications ?

–b– Faire un programme pour calculer $a+n\,x$ de trois façons différentes :
–1– De cette manière
–2– Comme $((((a + x) + x) + x) + \cdots + x)$
–3– Comme $(a + \cdots + (x + (x + (x + x)))))$
On pourra faire des essais avec $a = 1$, $n = 1000000$ (pas plus !) et $x = 0.1$ ou $x = 0.01$ ou $x = 0.001$ ou $x = 10^{-7}$ ou $x = 10^{-8}$.

–c– Calculer, en sommant par le début et par la fin, la somme des inverses des carrés des N premiers entiers (non nuls).
En SP, prendre $N = 10000$ et $N = 100000$
En DP, prendre $N = 10^6$, $N = 10^7$ et $N = 10^8$ (pour les deux derniers cas, le faire qu'une seule fois ! !)
–1– Comparer avec le résultat exact.
–2– Avec un peu de maths, on peut améliorer le résultat numérique grâce au reste de la série. Le faire.

• 4 • Calcul d'un polynôme

Soit $P(x, y) = 2\,x^2 - x^4 + 9\,y^4$.

–a1– Calculer, avec des entiers, la valeur de ce polynôme aux points $(2, 1)$, $(7, 4)$, $(97, 56)$, $(18817, 10864)$
–a2– Calculer, avec des réels SP, la valeur de ce polynôme aux points $(2, 1)$, $(7, 4)$, $(97, 56)$, $(18817, 10864)$
–a3– Calculer, avec des réels DP, la valeur de ce polynôme aux points $(2, 1)$, $(7, 4)$, $(97, 56)$, $(18817, 10864)$
–b– Pour les courageux, relation de formation de ces (x_n, y_n) , démonstration et explications.

• 5 • Équations du second degré

Faire un programme pour résoudre l'équation du second degré :
$$ax^2 + bx + c = 0 .$$
On prendra pour (a, b, c) les triplets de valeurs suivantes :
$(12, -84, 147)$ $(1.2, -8.4, 14.7)$ $(0.12, -0.84, 1.47)$
Aussi : $(3, -21, 36.75)$ $(0.3, -2.1, 3.675)$.
Aussi : $(6, 5, -4)$ $(10^{-30}, -10^{30}, 10^{30})$.

–a– On le ferra à la main, en SP et en DP .
–b– On pourra aussi étudier l'équation : $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (prendre pour des applications numériques des valeurs $\lambda = 10$ ou $\lambda = 100$.